Concours National Commun - Session 2014

Corrigé de l'épreuve de mathématiques II
Filière MP

Sous-espaces de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ formés de matrices diagonalisables

Corrigé par M.TARQI [1]

Exercice

1. Puisque A est symétrique réelle, alors elle est othogonalement diagonalisable. Soit λ une valeur propre de A et $X \in \mathscr{M}_{n,1}$ un vecteur propre associé à λ. Puisque $X \neq 0$, $(X|X) > 0$ d'où :
$$(X|AX) = \lambda(X|X)$$
ou encore $\lambda = \dfrac{(X|AX)}{(X|X} \geq 0$.
2. Il existe une matrice P orthogonale telle que $A = PD{}^tP$, D étant une matrice diagonale dont les éléments diagonaux λ_i sont positifs (d'après 1.).
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, posons $\lambda_i = \alpha_i^2$. Soit $\triangle = \mathrm{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. On a $A = PD{}^tD = (P\triangle){}^t(P\triangle)$.
Donc il suffit de prendre $M = {}^t(P\triangle)$.
3. (a) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$ et donc ${}^tMMX = 0$ et aussi ${}^tX{}^tMMX = (MX|MX) = 0$, donc $MX = 0$. Réciproquement, si $MX = 0$, alors $AX = {}^tMMX = 0$.
   (b) La question précédente montre que $\ker A = \ker M$, donc A et M ont le même rang.
4. (a) Posons $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. On a, pour tout (i, j), $a_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{ki}m_{kj}$; c'est le produit scalaire des vecteurs colonnes C_i et C_j. Donc $a_{ij} = (C_i|C_j) = {}^tC_iC_j$.
   (b) Par inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $(C_i|Cj)^2 \leq (C_i|C_i)(C_j|C_j)$, c'est à dire $a_{ij} \leq a_{ii}a_{jj}$.
5. On sait que A est de rang 1 si et seulement si, M est de rang 1 ou encore il existe λ_i tel que $C_i = \lambda_1 C_1$ (on changeant au besoin le numérotage on peut supposer la colonne C_1 est non nulle), et donc l'inégalité de Cauchy-schwarz dévient une égalité, ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ij}^2 = a_{ii}a_{jj}$.
Cette condition est suffisante pour que le rang soit égale à 1.
6. (a) Si B est positive, d'après ce qui précède, $b_{ij}^2 \leq b_{ii}b_{jj}$ ou encore $a_{ii}a_{jj} \leq a_{ii}^2$, donc, en tenant compte de la question 4(b), $a_{ij}^2 = a_{ii}a_{jj}$. Ainsi A est de rang 1 (d'après la question 5.)
   (b) Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. u est de rang 1 si et seulement si, il existe $a \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \lambda_x a$. Il est clair que l'application : $x \longmapsto \lambda_x$ est une forme linéaire non nulle.
   Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la matrice de u dans cette base s'écrit :
$$M = \begin{pmatrix} l(e_1)a_1 & l(e_2)a_1 & \dots & l(e_n)a_1 \\ l(e_1)a_2 & l(e_2)a_2 & \dots & l(e_n)a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l(e_1)a_n & l(e_2)a_2 & \dots & l(e_n)a_n \end{pmatrix} = X{}^tY,$$

1. M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc. E-mail : medtarqi@yahoo.fr

où $X = {}^t(l(e_1), l(e_2), ..., l(e_n)) \neq 0$ et $Y = a = {}^t(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$.
Mais $A = {}^tA$, et comme $\mathscr{B}$ est une bon, alors $M = {}^tM$ ce qui donne $X^tY = Y^tX$ puis $XX^tY = XY^tX$, donc X et Y sont colinéaires. Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Y = \lambda X$, donc nécessairement $\text{Tr}\, M = {}^tXY = \lambda^tXX$, donc $\lambda > 0$. Il suffit donc de prendre $U = \sqrt{\lambda}X$.
Posons $U = {}^t(u_1, ..., u_n)$, alors $\forall i$, $a_{ij} = u_iu_j$ et donc $b_{ij} = \dfrac{1}{u_i}\dfrac{1}{u_j}$, donc $B = {}^tVV$ où $V = {}^t\left(\dfrac{1}{u_1}, ..., \dfrac{1}{u_n}\right)$, donc B est positive.

Problème
Sous-espaces de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ formés de matrices diagonalisables

Première partie
Caractérisation des homothéties en dimension 2
Application au commutant

1.1

1.1.1 Soit x un vecteur non nul. Puisque x et $f(x)$ sont colinéaires, alors il existe λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.

1.1.2 Soit (e_1, e_2) une base de E, montrons que $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$. On a

$$f(e_1 + e_2) = \lambda_{e_1}e_1 + \lambda_{e_2}e_2 = \lambda_{e_1+e_2}(e_1 + e_2),$$

donc $(\lambda_{e_1} - \lambda_{e_1+e_2})e_1 + (\lambda_{e_2} - \lambda_{e_1+e_2})e_2 = 0$, donc $\lambda_{e_1} - \lambda_{e_1+e_2} = \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1+e_2} = 0$, d'où $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.

1.1.3 Soit $x = \alpha e_1 + \beta e_2 \in E$, on a :

$$f(x) = \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) = \alpha\lambda_{e_1}e_1 + \beta\lambda_{e_2}e_2 = \lambda(\alpha e_1 + \beta e_2) = \lambda x,$$

donc f est une homothétie de rapport λ.

1.2

1.2.1 Il est clair que $Id_E \in \mathscr{C}(f)$ et que si $g, h \in \mathscr{C}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda g + h \in \mathscr{C}(f)$, donc $\mathscr{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

1.2.2 Si f est une homothétie, alors $\forall g \in \mathscr{L}(E)$, $fg = gf$, donc $\mathscr{C}(f) = \mathscr{L}(E)$.

1.3

1.3.1 Puisque f n'est une homothétie, alors il existe $e \in E$, tel que $(e, f(e))$ soit libre, c'est à dire une base de E.

1.3.2 Les scalaires α et β sont les coordonnées du vecteur $g(e)$ dans la base $(e, f(e))$. D'autre part, si $g \in \mathscr{C}(f)$, on a :

$$g(f(e)) = f(g(e)) = f(\alpha e + \beta f(e)) = \alpha f(e) + \beta f(f(e)) = (\alpha Id_E + \beta f)(f(e).$$

Donc les deux endomorphismes g et $\alpha Id_E + \beta f$ coïncident dans la base $(e, f(e))$, donc ils sont égaux : $g = \alpha Id_E + \beta f$.

1.3.3 D'après ce qui précède, $\mathscr{C}(f) = \mathrm{Vect}(Id_E, f)$, donc (Id_E, f) est une famille génératrice de $\mathscr{C}(f)$, de plus elle est libre, en effet, si $\alpha Id_E + \beta f = 0$, alors en particulier $\beta e + \beta f(e) = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$, car $(e, f(e))$ est une base de E.
En conclusion, $\mathscr{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

1.4 Traduction matricielle

1.4.1 Si A est une matrice scalaire, on a $AM = MA$ pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, donc $\mathscr{C}(A) = \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

1.4.2 Si A n'est pas une matrice scalaire, comme dans 1.3, $\{I_2, A\}$ forme une base de $\mathscr{C}(A)$, donc $\mathscr{C}(A) = \mathrm{Vect}(I_2, A)$ et $\dim \mathscr{C}(A) = 2$.

Deuxième partie
Diagonalisation simultanée dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$

2.1 Si $a \neq c$ A est diagonalisable (le polynôme caractéristique scindé à racines simples). Si $a = c$ et $b \neq 0$ A n'est pas diagonalisable (A n'est pas une matrice scalaire). En conclusion, A est diagonalisable si et seulement si, $a \neq c$ ou bien $a = c$ et $b = 0$.

2.2 D'après la question 2.1, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2.3 La matrice A est diagonaliable si et seulement si, il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, donc $A + \lambda I_2 = P(D + \lambda I_2)P^{-1}$, ce qui montre que $A + \lambda I_2$ est semblable à une matrice diagonale, donc $A + \lambda I_2$ est diagonalisable.
Inversement, supposons qu'il existe D diagonale et P inversible tels que $A + \lambda I_2 = PDP^{-1}$, donc $A = P(D - \lambda I_2)P^{-1}$, donc A est diagonalisable.

2.4

2.4.1 Si A est une matrice scalaire, toute base de vecteurs propres de B est une base de veceurs propres de A. Donc A et B sont simultanement diagonalisables.
Supposons maintenant A est semblable à une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda, \mu)$ avec $\lambda \neq \mu$. Posons $E_\lambda = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $E_\mu = \mathrm{Vect}\{e_2\}$ les sous-espaces propres associés à λ et μ respectivement (sont des droites vectorielles). Comme $AB = BA$, E_λ et E_μ sont stables par B, ceci montre que e_1 et e_2 sont des vecteurs propres de B. Donc B est diagonalisable dans la même base de vecteurs propres de A, c'est à dire$A$ et B sont simultanement diagonalisables.

2.4.2 Posons $PAP^{-1} = D_1$ et $PBP^{-1} = D_2$ où D_1 et D_2 sont des matrices diagonales. Donc pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $P(A + \lambda B)P^{-1} = D_1 + \lambda D_2$, donc $A + \lambda B$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

2.5 Familles de matrices diagonalisables

2.5.1 Si toutes les matrices sont scalaires n'importe quelle base convient, sinon on choisit une matrice A_{i_0} qui n'est pas scalaire de valeurs propres λ et μ, et posons $E_\lambda = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $E_\mu = \mathrm{Vect}\{e_2\}$. On décompose $\mathbb{K}^2$ comme somme directe des sous-espaces propres :

$$\mathbb{K}^2 = E_\lambda \oplus E_\mu$$

Les droites vectorielles E_λ et E_μ sont stables par les matrices $(A_i)_{i\in I}$, donc $\{e_1, e_2\}$ est une base de vecteurs propre pour chaque A_i. On note P la matrice dont les colonnes sont données par les composantes de e_1 et e_2, alors, $\forall i \in I$, PA_iP^{-1} est une matrice diagonale.

2.5.2 On remarque que les matrices $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ sont diagonalisables puisque $A_i^2 - I_2 = 0$ (A_i est racine d'un polynôme scindé à racines simples) et puisque les A_i commutent, alors il existe une matrice inversible P telle que $\forall i \in [\![1, m]\!]$, PA_iP^{-1} soit diagonale. Posons alors

$$D_i = PA_iP^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_i, \mu_i).$$

Les valeurs possibles de A_i sont 1 ou -1, donc il y a au plus 4 valeurs possibles pour chaque D_i, ce qui donne 4 valeurs propres possibles pour les A_i. Ainsi on a montré que $m \leq 4$.

2.6

2.6.1 $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $J + \lambda K$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, car elle est symétrique réelle.

2.2.2 On a $JK = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix}$ et $KJ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, donc les matrices J et K ne commutent pas.

2.7

2.7.1 Puisque B est diagonalisable et n'est pas scalaire, alors B admet deux valeurs propres α et β distinctes. Donc il existe une matrice P inversible telle que $B = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}P^{-1}$.

2.7.2 On a $P^{-1}(A + \lambda(B - \alpha_2))P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d+\lambda\gamma \end{pmatrix}$. Comme le polynôme caractérisqtique est invariant par changement de base, alors $\chi_\lambda(X) = X^2 - (a + d + \lambda\gamma)X + a(d + \lambda\gamma) - bc$, et par conséquent $\delta_\lambda = (a + d + \lambda\gamma)^2 - 4a(a + \lambda\gamma) - 4bc$; c'est un polynôme de degré 2 et λ.

2.7.3 Soit $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\delta_{\lambda_0} = 0$, donc le polynôme caractéristique de $A+\lambda_0(B-\alpha I_2)$ admet une racine double. D'autre part, on sait que $A + \lambda_0(B - \alpha I_2)$ est diagonalisable (car $A + \lambda_0 B$ est diagonalisable) donc $A + \lambda_0(B - \alpha I_2)$ est une matrice scalaire.

2.7.4 Posons $A+\lambda_0(B-\alpha I_2) = \alpha_0 I_2$, donc la matrice A est un polynôme en B, donc elle commute avec B.

Troisième partie
Étude des sous-espaces de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ formés de matrices diagonalisables

3.1

3.1.1 Soit $B \in \mathscr{F}$ non scalaire, donc $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $A+\lambda B$ est diagonalisable, car $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel, et par suite, d'après la question 2.7, $AB = BA$, donc $B \in \mathscr{C}(A)$.
À partir de l'inclusion $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(A)$, on a $\mathscr{F} = \mathscr{C}(A)$ ou bien $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(A)$. Dans le premier cas $\dim \mathscr{F} = 2$ (la question 1.4), dans le second cas $\dim \mathscr{F} = 1$.

3.1.2 Si $\mathscr{F}$ contient I_2, alors $\mathscr{F}$ soit une droite vectorielle ou bien un plan vectoriel, de la forme $\mathscr{C}(A)$, ou un hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
$\dim \mathscr{F} \leq 3$, car $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ contient des matrices non diagonalisables (la question 2.1).

3.2 Le sous-espace vectoriel engendré par la matrice I_2, formé par des matrices diagonalisables (matrices scalaires) , est de dimension 1.
Le sous-espace vectoriel engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de dimension 2.

3.3 L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme d'espace vectoriel de $\mathscr{M}$, donc $P\mathscr{M}P^{-1}$ est un sous-espaces vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, comme image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire et $\dim(P\mathscr{M}P^{-1}) = \dim \mathscr{M}$.

3.4 On a $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Donc $\dim \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) = 3 = \dim \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) - 1$, donc $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Comme toutes les matrices symétriques réelles sont diagonalisables, alors $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ est formé des matrices diagonalisables.

3.5 D'après la question 3.3, $R\mathscr{S}_2(\mathbb{R})R^{-1}$ est un sous-espace vectoriel de même dimension que $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, donc c'est un hyperplan, de plus si A est diagonalisable, alors il est de même de la matrice RAR^{-1}, donc $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ est formé des matrices diagonalisables.

3.6

3.6.1 Si I_2 n'était pas un élément de $\mathscr{V}$, l'ensemble $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}I_2 \oplus \mathscr{V}$ serait constitué de matrices diagonalisables, ce qui est faux (il existe des matrices non diagonalisables). Donc I_2 est un élément de $\mathscr{V}$.

3.6.2 Il existe une matrice P inversible et α, β des complexes distincts tels que $A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1}$.
Mais on a
$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1} = \beta I_2 + (\alpha - \beta) Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$
Donc
$$Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta}(A - \beta I_2) \in \mathscr{V}.$$

3.6.3 On a successivement
$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = (a-d)A_1 + dI_2 + \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$
et par suite $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{W}$.
Supposons qu'il existe α et β tels que
$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha = \beta = 0$, et par suite $b = c = 0$ ce qui est faux. Ainsi $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{W} \setminus \mathrm{Vect}(I_2, A_1)$.
Comme il s'agit d'une matrice diagonalisable et non colinéaire à I_2, alors son polynôme caractéristique $X^2 - bc$ doit être scindé à racines simples, ce que donne la condition $bc > 0$.

3.6.4 On a $\frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{c} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{W}$, il suffit donc de prendre $w = \sqrt{\frac{b}{c}}$.
La famille $\{I_2, A_1, B_1\}$ est libre (vérification immédiate), et comme $\mathscr{W} \subset \mathrm{Vect}(I_2, A_1, B_1)$ et de dimension 3, alors $\mathscr{W} = \mathrm{Vect}(I_2, A_1, B_1)$.

3.6.5 Les valeurs propres de B_1 sont w et $-w$, des vecteurs propres associés sont respectivement $(w, 1)$ et $(-w, 1)$. Notons $P = \begin{pmatrix} w & -w \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.
Soit $M = \alpha I_2 + \beta A_1 + \gamma B_2$ un élément quelconque de $\mathscr{W}$, alors on a :

$$M = P\left(\alpha I_2 + \beta P^{-1} A_1 P + \gamma \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & -w \end{pmatrix}\right) P^{-1}.$$

On a $P^{-1} A_1 P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\alpha I_2 + \beta P^{-1} A_1 P + \gamma \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & -w \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, ce qui montre que $\mathscr{W}$ est conjugué à $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, par transitivité il est de même de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

3.7 Soit $\mathscr{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, formé de matrices diagonalisables, donc c'est un sous-espace de dimension ≤ 3, car il existe des matrices non diagonalisables.
• Le cas de la dimension 3 est traité dans la question 3.6.
• En outre, le résultat est clair pour les espaces vectoriels de dimension ≤ 1.
• Maintenant, si $\mathscr{V} = \mathrm{Vect}(M, N)$ est un plan vectoriel de matrices diagonalisables, alors deux cas sont possibles :
– Si $I_2 \in \mathscr{V}$, alors $\mathscr{V} = \mathrm{Vect}(I_2, A)$, où A est une matrice non scalaire de $\mathscr{V}$. Introduisons P la matrice de passage de la base canonique vers une base de diagonalisation de A.
Alors $P^{-1}\mathscr{V}P$ est un sous-espace vectoriel de matrices symétriques, ce qui établit le résultat dans ce premier cas.
– Si $I_2 \notin \mathscr{V}$ alors c'est un sous-espace vectoriel de l'hyperplan de matrices diagonalisables $\mathrm{Vect}(I_2, A, B)$ qui est conjugué à $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathscr{V}$ est conjugué à un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

3.8 Soit $\mathscr{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, formés des matrices orthogonalement diagonalisables.
• Si $\dim \mathscr{V} = 3$, on trouve $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.
• Si $\dim \mathscr{V} = 1$, on trouve les droites vectoriels engendrées par des matrices symétriques (toute matrice orthogonalement diagonalisable est symétrique).
• Si $\dim \mathscr{V} = 2$, on trouve les plans vectoriels de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

• • • • • • • • • • •